点列と net

　$[x \in \bar{E}] \Longleftrightarrow [\exists (x_n) \subset E \ s.t. \ x_n \to x]$，$[f$ が x で連続$] \Longleftrightarrow [\forall (x_n) \ s.t. \ x_n \to x \Longrightarrow f(x_n) \to f(x)]$ というように位相的性質が点列で表現できる．

　以下では第 1 可算公理を満たすとする．

Lem: X が第 1 可算公理をみたせば任意の $x \in X$ に対して x の基本近傍系 $\{V_i\}$ で減少列となるものが取れる．

Proof. 第 1 可算公理をみたすから x の基本近傍系 $\{U_i\}$ が存在する．$V_i = \cap_{j=1}^{i} U_j$ とすれば $\{V_i\}$ が求めるものになっている． □

Prop: $E \subset X$ **とする．** $x \in \bar{E} \Longleftrightarrow \exists (x_n) \subset E \ s.t. \ x_n \to x$.（ただし $x_n \to x$ とは任意の x の近傍 U に対してある番号 $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して $n \geq n_0 \Longrightarrow x_n \in U$ ということであるとする.）

Proof. $x \in \bar{E}$ とする．閉包の定義から x の可算個の減少する基本近傍系 (補題より取れる) の任意の元 U_i に対して $U_i \cap E \neq \phi$．よって各 i について $x_i \in U_i \cap E$ をとってきて作った点列 (x_i) は U_i の減少性から $x_i \to x$ が成立している．逆は第 1 可算公理を満たさなくても成立する． □

Def: $(A, \leq)$ が**有向集合 (directed set)** であるとは，１．$\forall \alpha \in A, \ \alpha \leq \alpha$，２．$\alpha \leq \beta, \ \beta \leq \gamma \Longrightarrow \alpha \leq \gamma$，３．$\forall \alpha, \forall \beta \in A, \ \exists \gamma \in A, \ \alpha \leq \gamma, \ \beta \leq \gamma$ がなりたつこととする．

ex: X：位相空間，$x \in X$，$\mathcal{N}_x$：近傍系に対して $U \leq V \overset{def}{\Longleftrightarrow} V \subset U$ とすると $(\mathcal{N}_x, \leq)$ は有向集合.

Def: X：Set, A：有向集合とする．$f : A \longrightarrow X$ を **net** という．$f(\alpha) = x_\alpha$ と表す．また $f(A) = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ と表す.

Def: $(x_\alpha)_{\alpha \in A} : (A, \leq) \longrightarrow X$ とする．$(B, \leq')$ を有向集合とし，$g : B \longrightarrow A$ は，１．$\beta_1 \leq' \beta_2 \Longrightarrow g(\beta_1) \leq g(\beta_2)$，２．$\forall alpha \in A, \ \exists \beta, \ \alpha \leq g(\beta)$ を満たすとする．このとき $f \circ g : B \longrightarrow X$ を $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ の **subnet** という．$f \circ g(B) = (x_{\alpha_\beta})_{\beta \in B}$ と表す.

Prop: $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ を net とする．$(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ の subnet の subnet は (x_α) の subnet.

Proof. $f : A \longrightarrow X$，$g : A' \longrightarrow A$ とすると $f \circ g : A' \longrightarrow X$ となる．$g' : A'' \longrightarrow A'$ とすると $(f \circ g) \circ g' : A'' \longrightarrow X$ となるが，$(f \circ g) \circ g' = f \circ (g \circ g')$ となり $g'' = g \circ g'$ と置いたときこれが subnet の性質を満たすことを確認すればよい．$\alpha'' \leq \beta'' \Longrightarrow g'(\alpha'') \leq g'(\beta'') \Longrightarrow g \circ g'(\alpha'') \leq g \circ g'(\beta'') \Longrightarrow g''(\alpha'') \leq g''(\beta'')$ となる．二つ目の性質 (cofinal) は定義に返れば分かる． □

Def: X を位相空間とし，$(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ を net とする．$[x_\alpha \longrightarrow x \in X] \overset{def}{\Longleftrightarrow} [\forall U : x$ の近傍$, \exists \alpha_0, \ \alpha \geq \alpha_0 \Longrightarrow x_\alpha \in U]$.

Prop: $M \subset \bar{X}$ とする．$x \in \bar{M} \Longleftrightarrow \exists (x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset M, \ x_\alpha \to x$

Proof. $x \in \bar{M}$ とする．任意の x の近傍の全体 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対して包含関係によって A は有向集合となる．$V_\alpha \cap M \neq \phi$. よって各 α に対して x_α をとる．このとき $x_\alpha \to x$ となる． □

Prop: $f : X \longrightarrow Y$ とする．$[f$ が x_0 で連続$] \Longleftrightarrow [\forall (x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset X, \ x_\alpha \to x_0 \Longrightarrow f(x_\alpha) \to f(x_0)]$

Proof. 背理法を用いる．x_0 で連続でないとすると $\exists V \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$，$\forall U_\alpha \in \mathcal{N}_{x_0} \ s.t. \ f(U_\alpha) \not\subset V$ となる．各 α について $x_\alpha \in U_\alpha$ を $f(x_\alpha) \notin V$ ととれる．近傍は有向集合となり，$(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ は x に収束する．しかし $f(x_\alpha) \not\to f(x_0)$ となり矛盾． □

Prop: X を位相空間とする．X が Hausdorff 空間であることと $\forall (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ の収束先が一意であることは同値．

Proof. Hausdorff 空間であれば収束先が一意であるのは省略．逆を背理法を用いて示す．X が Hausdorff 空間でないとする．$\exists a, \exists b \in X,\ a \neq b\ s.t.\ \forall U \in \mathcal{N}_a = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A},\ \forall V \in \mathcal{N}_b = \{V_\beta\}_{\beta \in B},\ U \cap V \neq \phi$．$\Lambda = A \times B$ とし，$(\alpha_1, \beta_1) \leq (\alpha_2, \beta_2) \overset{def}{\iff} U_{\alpha_1} \supset U_{\alpha_2}$ かつ $V_{\beta_1} \supset V_{\beta_2}$ とすると，$(\Lambda, \leq)$ は有向集合となる．$\forall \lambda = (\alpha, \beta),\ U_\alpha \cap V_\beta \neq \phi$ より一点を取りこれを x_λ とする．すると $\forall U_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha, \forall V_\beta \in \mathcal{N}_b$ にたいして $\lambda = (\alpha', \beta') \geq (\alpha, \beta) \implies x_\lambda \in U_{\alpha'} \cap V_{\beta'} \subset U_\alpha \cap V_\beta$．$x_\lambda \to a, b$ となり Hausdorff 空間ではない． □