CounterExample in Topology 第 2 回 (2012/2/23)

CounterExamples: **Partition Topology, Odd-Even Topology, Deleted Integer Topology**

X を集合とし，$\mathcal{P}(X)$ を X の冪集合とする．P を X の分割とし空集合も含むものとする．つまり $P \subset \mathcal{P}(X)$ で $\cup_{A \in P} A = X,\ \phi \in P,\ A, B \in P,\ A \neq B \Longrightarrow A \cap B = \phi$ を満たすものとする．

$$O \subset X \text{ が開集合 } \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \Lambda \subset P \text{ s.t. } O = \bigcup_{A \in \Lambda} A$$

と定義することで，開集合系を定めた位相を Partition Topology という．開集合系の公理を満たすことを確認する．まず分割の定義より $\phi,\ X$ が開集合であることは明らか．また $\{O_\mu\}_{\mu \in M}$ を開集合系の族とすると，開集合の定義から各 μ に対してある $P_\mu \subset P$ が存在して $O_\mu = \cup_{A \in P_\mu} A$ と表される．$\cup_{\mu \in M} O_\mu = \cup_{\mu \in M} \cup_{A \in P_\mu} A$ となるから定義より $\cup_{\mu \in M} O_\mu$ は開集合となる．また O_1, O_2 を開集合とし，$P_j \subset P,\ O_j = \cup_{A \in P_j} A\ (j = 1, 2)$ とする．$A, B \in P,\ A \neq B \Longrightarrow A \cap B = \phi$ を満たすことから $O_1 \cap O_2 = \cup_{A \in P_1} A \cap \cup_{B \in P_2} B = \cup_{A \in P_1} \cup_{B \in P_2} A \cap B = \cup_{C \in P_1 \cap P_2} C$ となる．よって定義より $O_1 \cap O_2$ は開集合である．以上より開集合系の公理を満たすことが確認された．

1．任意の開集合は閉集合でもある．なぜならば開集合 $O = \cup_{A \in Q \subset P} A$ とすると $O^c = X \setminus O = \cup_{B \in P \setminus Q} B$ で $P \setminus Q \subset P$ なので開集合の定義から O^c は開集合である．よって O は閉集合である．次に X/P が離散空間であることを示す．ただし X/P は $x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x, y \in \exists A \in P$ という同値関係の商空間で自然な射影 $\pi : X \longrightarrow X/P$ による商位相を入れたものとする．X/P の任意の 1 点 $[x]$ の π による逆像はある分割の要素であるから，X/P の任意の 1 点は開集合である．従って X/P は離散空間である．

2．明らかに離散位相と密着位相は Partition Topology の一種である．一般にある分割の要素で 2 つ以上の要素を含むものがあれば開集合の定義から T_0 空間でない．従ってこのとき $T_{2\frac{1}{2}}, T_2, T_1$ ではない．また分割の要素の和で表されるとき開集合としているので，閉集合ならば開集合である．開集合なら閉集合でもあったから開集合であることと閉集合であることは閉集合であることは同値．これより T_3, T_4．よって $T_{3\frac{1}{2}}$．また $A, B \subset X,\ \bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \phi$ のとき $\bar{A}, \bar{B}$ は共に開集合であり $A \subset \bar{A},\ B \subset \bar{B}$ なので T_5.

3．Partition Topology の例として Odd-Even Topology というものがある．これは $X = \mathbf{Z}_+$ (positive integers) とし，$P = \{\{2k-1, 2k\}\}_{k=1}^{\infty}$ として Partition topology を入れたものである．P 自身が可算開基となっているので第 2 可算公理を満たす．従って可分かつ第 1 可算公理を満たし Lindeloef である．空でない任意の部分集合 A に対して $a \in A$ をとると，a を含む任意の開集合は a が奇数ならば $a+1$ を，a が偶数ならば $a-1$ を必ず含む (odd-even topology の定義より)．よって空でない任意の部分集合は必ず極限点を含む．よって X は weakly countably compact．X は countably compact ではない．なぜならば X は P で被覆されるが有限部分被覆を持たない (もつとすれば X は有限集合となって矛盾).

4．X を positive integers の集合とし odd-even topology を入れたものとする．また $\mathbf{Z}_+$ を同じく positive integers の集合とし，離散位相を入れたものとする．$f : X \longrightarrow \mathbf{Z}_+$ を

$$f(x) = k \ (\text{if } x = 2k-1, 2k)$$

とすると，明らかに f は連続写像となる．X は weakly countably compact であるが，$\mathbf{Z}_+$ は離散空間であるから一点集合が開集合であるから weakly countably compact でない．よって weakly countably compactness は連続写像によって保存されない.

5．odd-even topology のほかの例として $X = \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{Z}_{\geq 0} = \cup_{n=1}^{\infty} (n-1, n)$ とし，$P = \{(n-1, n)\}_{n=1}^{\infty}$ として，partition topology を入れたものがある．

6．partition topology は擬距離化可能である．次のような擬距離を入れることができる．

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{(if x and y belong to the same set of the partition)} \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

7．離散位相を入れた実数の二点を同一視し，商位相を入れて得られる空間も partition topology である．この空間には非可算無限個の互いに素な開集合が存在する．任意の部分集合は limit point を持つから weakly countably compact である．また分割が非可算無限個存在するから second countable でも Lindeloef でもない．

General Property of Odd-Even Topology

T_1 ではないので Urysohn, SemRegular, Regular, CompRegular, Normal, CompNormal, PerfNormal でない．分割で被っても有限部分被覆を持たないのでコンパクトではない．$\{2k-1, 2k\}$ はコンパクトであるから σ コンパクトである．Lindeloef, paracompact，metacompact, countably paracompact, countably metacompact も同様にして明らか．$a_n = n$ という数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列をもたないから点列コンパクトではない．コンパクトではないから擬コンパクトではないし，実際 $f(x) = k$ (if $x = 2k-1, k$) は連続であるが X の像 $f(X) = \mathbf{Z}_+$ は有界ではない．$\{\{2k-1, 2k\}\}_{k=1}^{\infty}$ は任意の点の基本近傍系で $\{2k-1, 2k\}$ は開かつ閉集合でコンパクトであるから locally compact, strongly locally compact．σ コンパクトでもあったから σ locally compact である．奇数全体の集合は可算集合で明らかに稠密であるから可分．したがって Countable Chain Condition を満たす[1]．$\{\{2k-1, 2k\}\}_{k=1}^{\infty}$ は任意の開被覆の star refinement であるから fully T_4．しかし T_1 ではないから fully normal ではない．$\{2k-1, 2k\}$ は開かつ閉であるから連結ではない．よって弧状連結でも arc connected でもない．よって hyperconnected, ultraconnected ではない．$\{2k-1, 2k\}$ は弧状連結であるから locally connected, locally path connected．また可算集合は arc connected に成り得ないから locally arc connected ではない．

[1]可分ならば Countable Chain Condition を満たす．実際可分な集合を D とし disjoint な開集合の族を $\mathcal{F}$ とすると，$\mathcal{F}$ の各要素 (開集合) に対してその要素がふくむ D の点を対応せることにより $\mathcal{F}$ から D への単射が構成できる．よって $\mathcal{F}$ は高々可算な集合である．従って Countable Chain Condition を満たす．